京都帝國大學經濟學會

經濟論叢

第四十九巻第六號

昭和十四年十二月

經濟論叢每月一日發行
第四十九巻第六號 昭和十四年十二月一日發行
大正四年六月二十一日第三種郵便物認可

論叢

近世中期の經濟思想……經濟學博士 本庄榮治郎

波動の內在性……文學博士 高田保馬

時論

水產食糧の確保と漁業組合……經濟學博士 蜷川虎三

法幣對策論の起結……經濟學士 德永淸行

研究

遼史食貨志に見はれたる經濟思想……經濟學士 穗積文雄

問屋の歷史的特質……經濟學士 堀江英一

エッヂワースと「統計の方法」……經濟學士 理學士 馬場吉行

說苑

クラークの植民地無價値論……經濟學士 金持一郎

大工場が地方經濟に及ぼす影響……經濟學士 菊田太郎

附錄

彙報

外國雜誌論題

本誌第四十九巻總目錄

エッヂワースと「統計の方法」

馬場吉行

はしがき

エッヂワースは一八八五年ロンドン統計學會五十周年記念會議に於て、「統計の方法」[1]なる論文を報告した。これは、彼が確率論を統計學に應用した最初の重要な論文で、[2]「平均の比較」或ひは「偶然の除却」と呼ばれる問題を取扱つてゐる。所謂標本論(Sampling)の一問題に屬するが、[3]この論文は、この方面の研究に於て、先驅的な業績と認められてゐる。[4]

わたくしは本稿に於て、エッヂワースが何を問題としたか、この問題の攻究を如何に行つたか、其の得た規準は何かをたづね、ついで、彼が如何にこの規準を具體例に適用したかを考究しよう。特に「平均比較」の方法自體の意義・性質について、彼の見解を理解したいと思ふ。

一　問題

エッヂワースは、先づ統計學の定義について、三通りをあげてゐる。第一は最も通俗的のもので、統計學は社會科學の算術的部分であるとし、例へば死亡率の如き平均のまはりに動搖する數字や、又例へば一の戰ひに於て戰死した人數とか、ペストでたほれた家畜の數の如き、所謂孤立値(Solitary returns)を取扱ふ。第二は最も哲理的

1) Edgeworth, F. Y., Methods of Statistics (Journal of the Statistical Society, Jubilee Volume), 1885, pp. 181–217.
2) Bowley, A. L., F. Y. Edgeworth's Contributions to Mathematical Statistics, 1928, p. 86.
3) Bowley, A. L., Elements of Statistics, 1937, p. 329ff. Žižek, F., Statistical

(Phylosophical) なもので、統計學は、物理觀測値をも含めて、平均一般の學問であるとする。第三の定義は、前二者を調和させたもので、統計學を特に社會現象によつてあらはされる平均の學問であるとする。彼は最後の定義を採用するが、時に他の二つも參照するといふ。こゝに「平均 (Mean) といふ用語は、勿論相關的な觀念即ち平均を取らうとする一つの級 (Class) の諸値或ひは一系列 (Series) の諸項をも含んでゐる。レキシス教授の用語では、集團現象 (Massenerscheinungen) である。[1]」

ついで彼は統計學の問題を提出する。「平均の學問は二つの主要問題を含んでゐる。第一、提出された諸平均の間の差違がどこまで偶然的であるか、又は一法則を指示するかを見出すこと。第二、何が最良の平均であるか、それが第一の問題―偶然の除却―を考察するを目的とするも、或は他を目的とするも。[2]」

彼はこの論文では第一の問題を取上げる。これは又二つの場合にわかれる。即ち、(A) 單一の平均同士を比較するとき、及び (B) 一組の平均と單一の平均又は他の一組の平均とを比較するときである。

(A) の第一例として、所謂「心靈研究」(Psychical research) に於ける最近の實驗結果をあげてゐる。「一人がトランプの同種の札一揃を取り出す。他の一人が、その選擇を中てるものとする。數百回からうした選擇と臆測とを記錄したとき、成功した臆測の割合は、この場合單に偶然のみが作用したと想像したときの、最もあり得べき値 ($\frac{1}{4}$) を可成超えてゐた。[3]」即ち「一八三三回の試行に於て、成功した臆測の數は、全數の四分の一即ち四五八を五二も超えてゐる。[4]」この場合吾々の問題は、この差違がどこまで重要であるか、即ち「偶然以外の一法則を指示してゐるのか、又は單に偶然的であるのかを研究する。[5]」

Averages (translated by Persons, W. M.), 1913, p. 186ff.

4) Westergaard, H., Contributions ts the History of Statistics, 1932, pp. 230-231.

1) 2) 3) 4) 5) Edgeworth, ibid., p. 182.

次に(A)の第二例として、特定職業の死亡率への影響如何の問題をあげてゐる。ある年の十五歳から二十五歳までの青年の死亡數六五についてみるに、その中農夫に於ての死亡率が他のすべての職業に於ての死亡率を〇・三%超えてゐた。このときかゝる差違はどこまで農夫といふ特定條件についてあらはれてゐると見るべきかゞ問題である。

次に(B)の説明として、先づ上述「心靈研究」の一例をとつてゐる、即ち「上述と同様な數個の實驗をした際そのすべてか或ひは多くが、偶然以外の何かの作用を指示してゐる場合である。」[6] 今一つの例として、「アメリカの數州に於て、三〇歳から三三歳の男子平均身長が、二七歳から三〇歳の男子の平均身長よりもすこし大であるとする。このとき、單純な比較によつて與へられた證據が、繰返しにより如何に高められるか。」[7] これが(B)の問題である。

右の如く、提出された平均につき、「偶然の除却」をなし、それらの間の差違がどこまで重要かを檢しようとする。この場合この原因を具體的にしらべやうとするのではなく、單に特殊な原因が作用してゐることを指摘するに止める。即ち例へば「吾々は三〇歳以上の男子の平均身長と、三〇歳以下の男子の平均身長との間に眞の重要な差違があるかどうかを決定しようとはするが、かゝる差違が三〇歳以後の眞の成長に基くとすべきか、或は又背の高い人が生き殘つたとすべきか、これは專門家に委ねる。」[8]

エッヂワースは本論文に於て、平均の差違の問題を右の如く(A)(B)にわけ論じてゐる、しかしほとんど前者の説明にあて、(B)の考察はあまりに簡單にすぎる。よつてわたくしは本稿に於て專ら(A)の紹介に終始したいと思ふ。

6) 7) 8) ibid., p. 183.

二　方　法

エッヂワースはこの問題を攻究するに際し、確率論を應用した。即ち誤差法則（確率曲線）を用ひて、「偶然を除却」したのである。

彼の誤差法則については、彼はかう述べてゐる。即ち「もしも一量が、ある一定の仕方で多數の原素の一組によつてきまるとする。その諸原素は各々法則に從ひつゝ、その時々に相互に獨立な値を取るものとする。このとき複合量がその時々にとる諸値は一の誤差法則の下にならぶであらう。[1]」これが所謂「獨立原因の假說」で、諸原素から複合量を得るには、加法によるを常とする。更に複合量として諸原素の算術平均値を取る場合が、さしあたつて重要である。

誤差法則の函數形は、その第一次近似として、正規法則（その圖は正規曲線）を得る、エッヂワースはこの論文では未だ誤差法則の一般化に到つてゐない。專ら正規法則が用ひられる。この方程式は $y=N\frac{1}{\sqrt{\pi}c}e^{-\frac{x^2}{c^2}}$ であらはされる。こゝに、Nは觀測數、或は統計値（Statistical returns）の總數を示す。xは觀測値又は統計値の算術平均に應ずる値を0としたとき、各値のそれからの偏差で、yはそれに應ずる度數である。cはモヂュラス（Modulus）と呼ばれる基本的常數で、彼のこの論文ではcの應用が重點とされるのである。

誤差法則の性質として、xが $-2c$ から $+2c$ の間にあるときの、度數yはその全數の大部分（即ち〇・九九五）を占める。從つて逆に考へると、もしも誤差法則を滿足する例へばN個の統計的數の一組から、任意に（at random）

1) Edgeworth, ibid., p. 186.
拙稿, エッヂワースと誤差の問題、（經濟論叢、昭和 12 年 11 月）
同, エッヂワースと誤差法則、（經濟論叢、昭和 13 年 6 月）

一個を取り出したならば、それが平均からモヂュラスの二倍（從つて三倍）以上隔たることは極めてありえない。」[2] この性質こそ、エッヂワースが偶然の除却に於て基準とした原理である。

誤差法則は、如何なる條件の下におこるか。先づ觀測のときに得る誤差の分布、偶然の勝負事 (Games of Chance) の場合、及び統計値 (Statistical returns) の場合がある。彼はこの最後の場合として二例をあげてゐる。第一は英國成年男子八、五八五人の身長の分布（一、八八三年）であり、$y=8{,}585\frac{1}{\sqrt{\pi 3.6}}e^{-\frac{x^2}{13}}$ であらはされる。第二は毎年略六、〇〇〇の出生のある諸州に於ける最近二〇年間の男兒出生數の女兒出生數に對する比率の分布で、平均は一、〇四〇、cの値として略三八（千分比）を得るとしてゐる。

しかも誤差法則は、獨立原因の假説を滿足すると思はれる、前記の現實にあらはれてゐる場合のほか、「人爲的にその適合の世界 (Sphere) を有する。」[3]「今この法則を滿足しない一組の値 (Returns) を考へる。例へば佛國ドゥ縣 (Department of Doubs) に於ける身長の測定値を取る。今この縣から例へば百人、千人といふかなり大きい組を任意に取出すとする。そしてその身長の算術平均を作る。この操作を繰返す。かくして得た平均は、一の確率曲線の下にならぶ（傾きがある。）[4]」かくして「今まで、吾々の得る値がそのまゝで人爲を加へない時に、誤差法則を滿足するか、しないかといふ事情にあまり重きを置きすぎたかと思はれる。」しかも「偶然の除却に必要なのは、吾々の觀察値の原資料が誤差法則を滿足してゐるといふことではなく、それがある法則に不變に從つてゐるといふことである。[5]」

このやうに獨立原因の假説は、誤差法則の實現にあたり、經驗的に得られる場合にも又人爲的に求められる場

2) ibid., p. 185.
3) ibid., p. 186.
4) 5) ibid., p. 187.

合にも、ひとしく應用される。これ本論文に於ける、誤差法則の適用の第二の重要な點である。

以上わたくしは、彼の誤差法則を述べ、特に以下に於て留意さるべき二點をあげた。しからば彼の「偶然の除却」はこの法則を如何に適用してなされてゐるであらうか。

誤差法則の用ひ方は、「(一)二つの提出された平均の間の差違が偶然的であるか否かを決定する爲に、偶發的であると思はれるこの差違が、その下にならぶ確率曲線を作る。(二)觀察された平均の間の差違が、この曲線のモヂュラスの二倍又は三倍を超えるかどうかをみる。(三)もしも超えるならば、その差違は偶發的ではない。」[6]

次に彼の擧げる例について、右の規準を適用する。「英國の一般人口に屬する成年男子八、五八五人の平均身長に、二、三一五人の犯罪者の平均身長を比較し、觀察された差違が重要であるか」[7]の問題を取扱はう。(一)二、三一五人の(一般人口からの)任意選擇(Random Selection)の平均と、八、五八五人の任意選擇の平均との差の變動が従ふべき曲線を作る。(二)觀察された差違二(吋)とモヂユラス〇・二の三倍とを比較する。(三)前者ははるかに後者を超えてゐる。それ故その差は原因より來る("Comes by causes")。

「しからば如何にして、今問題としてゐる差に對する確率曲線を作るべきか。これには次の命題を用ひる。二つの量の差に對するモヂュラスは、この二量の夫々に屬するモヂユラスの平方の和の平方根に等しい。」[8]

次に、ある度數分布を有つ量につき、一定個數を選んで算術平均を多數取るとき、その平均は上述により一の確率曲線を與へる。この曲線のモヂュラスを如何に決定するか。

これには二つの場合を區別する。(一)吾々の取扱ふ値(Returns)が、空間(Space)又は時間(Time)に於ける測定

6) 7) ibid., p. 187.
8) ibid., p. 188.

値(Measurements)、例へば人の身長、死亡年齢、及び單なる數(Mere numbers)、例へば年々の死亡數、(二)比率、例へば男兒出生數の女兒出生數に對する割合又は死亡率。更に(一)、(二)をいづれも二つにわける。即ち(α)吾々の材料(Data)が誤差法則を滿足する場合、(β)滿足しない場合、之れである。

(一)(α)—この場合は吾々の原觀察値は、正規曲線の下にならんでゐる。先づこの曲線のモヂュラスを求める。これに三通りをあげる。第一方法は、誤差自乘平均方法とも云ふべく、觀察値(x_1)全體の算術平均(M)をとり、次にx_1とMとの差を作る。これをe_1、e_2、…e_nとする。さうすると$\frac{2Se^2}{n}$[9](或は$\frac{2Se^2}{n-1}$)は動搖(Fluctuation)と呼ばれ、この平方根がモヂュラスである。第二方法はモヂュラスを$\sqrt{\pi}\frac{Se}{n}$により求める。第三は、所謂ゴールトンの方法で、第一、第三四分位數の間の距離が$2c\times0.476$に等しいことから、モヂュラスcを求める。

これら三種の方法は、もし觀察値が正規曲線に於ける横坐標全體であるならば、完全におなじ値を與へるけれども、現實に於てはその値に喰違ひを生ずる。エッヂワースは第一方法が、正確の點に於て最も優れてゐると述べ、又實例をとつてこの三種の方法を用ひてモヂュラスを算定し、略同じ値を得てゐる。

かくの如くして原材料たる個別觀察値に對するモヂュラス(c)が定められると、かゝる個別觀察値全體から任意に取り出したm個の値の算術平均に對するモヂュラス($\bar{c}$)は$\bar{c}=\sqrt{\frac{c^2}{m}}$により與へられる。

(β)—この場合は、原材料の個別觀察値は誤差法則に從はない。しかしある一定の度數分布曲線を有つてゐる。そこでこの曲線について、上述の意味に於けるモヂュラス(正規曲線の)を求めることは出來ない。しかしこの個別觀察値(n個)から一定數(m個)の値を任意に取り出しその算術平均を作ると、この値は相あつまつて正規曲線

9) エッヂワースは加法の記號としてΣのかはりにSを用ひる。

を作る。このモヂュラスcは(α)の第一方法と同様にして求められる。即ち $c=\frac{2S_e^2}{n}$, $\bar{c}=\sqrt{\frac{c^2}{m}}$ で、便宜上 c^2 を原曲線の動搖、cをモヂュラスと呼んでゐる。

(二)比率の場合についてモヂュラスを求めるには、上述誤差自乘平均方法によるもの、所謂物理的方法 (Physical method) のほかに、組合せ方法 (Combinatorial method) がある。この點につき、エッヂワースは前者を推すのであるが、これについて彼の見解をうかゞはう。

「統計的比率 (Statistical ratio) ――男兒出生數と女兒出生數との割合、婚姻數の全人口 (少くとも婚姻可能な部分) に對する割合の如き――のモヂュラスを確定するには、もつと簡單な方法が適用出來ると考へられて來た。そしてかゝる數値は偶然の勝負事に於ておこると同じ動搖を有するものと想像されて來た。」[10] 即ち「今までしば〳〵男兒出生數の女兒出生數に對する如き比が、これと同じく豫め定められる動搖をあらはすだらうと、暗默の中にほのめかされた。しかしこの一致は前もつて知ることは出來ない。事實出生に際しての體性比の場合には、これは存在する。しかし出生率、死亡率、及び婚姻率の場合に、一般にさうではない。かゝる比率に對する誤差法則の存在は、小さい原因の複合に基づく、そしてその動搖は偶然の勝負事の類推によつて確定さるべきではなく、時間及び空間に於ける測定値の場合に用ひられる方法によつてゞなければならない。即ちレキシス教授によつて主張された重要な分類に從へば、「組合せ方法」と區別される「物理的方法」によらねばならない。」[11]

このやうに比率の場合に、もとの値が誤差法則に從ふとき即ち(α)の場合にも、物理的方法によるべきものとする彼は、(二)(β)についても同樣誤差自乘平均方法をとつてゐる。

10) ibid., p. 191.

11) ibid. p. 191. なほ出生に於ける體性比 r を變量とみる故、r に對するモヂュラスは $(1+r)\sqrt{\frac{2r}{n}}$, r の百分比で示せば $\frac{100(1+r)}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{2}{n}}=200\sqrt{\frac{2}{n}}$

以上により、一定の度數分布を有つ値(測定値、單なる數、及び比率)につき、一定個數を選んで、算術平均を取るとき、それらが相あつまつて出來る確率曲線のモヂュラスは、原則的には誤差自乘平均方法により求められることを知つた。かくて、二つの提出された平均の間の差違判定の上述の規準が出來あがる。

以上に於て、エッヂワースの平均の比較の基準を紹介したが、今これを要約し、この基準の數學的理論の根據と、これが具體例への適用に際しておこる問題をあきらかにしたい。

(一)數學的理論の根據—(1)無數の個數よりなる一の級(Class)がある度數分布を作つてゐるとする。このとき動搖 $c^2=\frac{2Se^2}{n}$ は確定する。但しeは各値とそれらの算術平均(M)との差、nはこの級の個別値の個數で、理論的には無限個をとる。cはモヂュラスと名付けられる。—與へられた度數分布は確定であるを要するが、それが正規曲線を畫くや否やは問はない。

(2)今この級から、任意選擇によつてm個をとり出し、その算術平均を求める。この無數の算術平均は正規曲線を與へる。(第一次近似的に)—これは誤差法則の理論による。このときmの大いさに限定がある。—この正規曲線のモヂュラスは $\sqrt{\frac{c^2}{m}}$ で與へられる。又この曲線の軸の横坐標はもとの級に於ける各値の算術平均Mに應ずる。

(3)次に又この階級から、前同樣任意選擇によつてm′個をとり出し、その算術平均の作る正規曲線を考へると、そのモヂュラスは $\sqrt{\frac{c^2}{m'}}$ であたへられ、軸の横坐標はMに應ずる。

(4)上の(2)及(3)に屬する値を各々任意選擇してその差を作る。これ又正規分布曲線をなし、そのモヂラュスは $C=\sqrt{\frac{c^2}{m}+\frac{c^2}{m'}}$ で與へられる。(軸は縱軸と一致する。)

(r=1.041) となる。(Bowley, A. L., F. Y. Edgeworth's contribution to mathematical Statistics, p. 91. による。)

(5)故に今(2)から任意にA_1を、(3)から任意にA_2をとり出すとき、$A_1 \sim A_2 \geqq 2C$ なる確率は $2\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 0.0047$ 即ち又 $A_1 \sim A_2 < 2C$ なる確率は〇・九九五三となつて、即ちこのことは殆んど確からしい。

(6)以上數學的に考へた差と、具體的な現に與へられてゐる差とを對比する。今二つの級を考へるとき、兩者の算術平均の差 $M_1 \sim M_2$ が $2C$ (從つて $3C$) より大ならば、M_1、M_2が同一級から任意選擇によつて得た平均であることはほとんど確からしくない。なほ $M_1 \sim M_2 < 2C$ ならば、M_1、M_2の屬する級について、積極的にその差違を主張し得ない。

(7)以上はモヂュラスを求めるのに、物理的方法に據つた場合であるが、若し組合せ方法をとる比率の場合ならば $\sqrt{\frac{2p_1q_1}{n_1} + \frac{2p_2q_2}{n_2}}$ の形を取らねばならない。[12]

(二)具體例への適用の問題—これが統計的方法として問題となる。

(1)彼は統計値の組—級—を二つに分類し(一)測定値又は單なる數及び(二)比率となし、更に何れも(α)正規曲線をみたす場合及び(β)然らざる場合にわけた。

(2)上の分類はモヂュラス(C)決定の際に取りあげられた。(一)に於ては、級の度數分布は數學的理想的な函數であつた。しかし今は現に與へられた度數分布曲線からCを定めねばならない。先づ $c = \sqrt{\frac{2Se^2}{n}}$ に於て、nは觀察値の總數、eは觀察値の算術平均と各値との差である。次に m, m′ の大いさに限定がある。(組合せ方法の場合には與へられた比率 $p_1\ p_2 \cdots p_n$ から一個の p を—算術平均により—求めねばならぬ。)

次に(一)の理論によれば、與へられた級につきモヂュラスcを知り得ねばならない。しかして問題の平均M_1、M_2

12) Bowley, ibid., p. 91.

は、平均された個數 m、m' と共に、單にその値のみを知ればよく、何等 M_1、M_2 を作つた具體的な個別値を要しない。しかるに事實は正にこれに反し、原級はそのモヂュラスを與へられること少く―原級は假定に止まること普通にして― M_1、M_2 を作つた個別値の一組が與へられてゐる。そこで M_1 又は M_2 を作つた個別値の一組を原級の標本 (Sample) とみなし、これは原級の度數分布を近似的に與へるものとし、平均 (M) のほかにこのまはりの分布狀態をしめすモヂュラスを、代用することが起るであらう。[13]

(3) 更に立入つて考へると、吾々の觀察値の一組はそれが測定値にしろ、又統計的比率にしろ、これを一方向に於ける特徴の差違をのぞき、他は同一性質を有つとされる。そしてこの特徴の差違が、重要視さるべきか否かを論じてゐる。從つてこの差違が例へば質的な場合には、時間的又は場所的な變化や影響はないとされる。即ち一應無視される。かくて一の級が考へられ更に具體的に得た諸値は、その中より任意選擇によつて得たものとされる。しかし、現實の問題に於ては、かゝる假定は充分に滿足されてゐるとは云ひ得ないであらう。

三　適用例

エッヂワースは、誤差法則に基いて、平均比較の規準を得た後、これを具體例に適用して說明してゐる。これは三大別され、人體測定學 (Anthropometry) に於ける例、出生、死亡、婚姻に於ける例、及び雜例となつてゐる。以下わたくしは、彼のあげた諸例の中、「偶然の除却」の方法をよく說明せるものを取りあげ、この方法の具體例に於ける適用の仕方をみたいと思ふ。

13) Bowley, ibid., p. 93.

(一)人體測定學—エッヂワースは、先づ成年男子の身長のモヂュラス—度數分布に於ける—が如何ほどかを確定してゐる。彼は前出一、八八三年英國の人體測定學協會報告に基き、八、五〇〇人の身長についてのモヂュラスを計算し三・六を得た。其の他あはせて十例につき計算し、成年男子身長のモヂュラスは、諸國とも略三・六なることを見出した。動搖は一三とみた。

彼は以上の準備の下に、同報告から六つの例を取りあげてゐる。

先づ第一例をみよう。八、五八五人の一般成年男子人口の身長の(算術)平均にくらべると、二、三一五人の犯罪者の平均身長は約二吋の差がある。この差は比較してゐる級の條件に眞の差違あることを示してゐるや否や、を見出すこと。(前掲)「上に與へた公式により、兩平均の差に對するモヂュラスは(二、三一五人が一般人口からの任意選擇であると假定して) $\sqrt{\frac{13}{8,585}+\frac{13}{2,315}}=0.08$ このモヂュラスの三倍〇・二五吋は兩平均の間の觀察された差(二吋)よりずつと小さい。從つて其の差はたしかに偶發的ではなく、一の法則を指示してゐる。[1]」

今この例について考察するに、先づ成年男子人口の身長の度數分布はきまつてゐて、その動搖は一三とされてゐる。この一圍から、八、五八五の個別値が任意に選ばれたとする。又犯罪者二、三一五人も、一般成年男子人口から假りに任意に選ばれたとし、即ち身長についていへば、二、三一五の個別値が任意に一般成年男子身長の級から、とり出されたと考へてゐる。そして比較のモヂュラスを計算したのであつた。さて八、五八五の身長は一般成年人口の身長全體をうかゞひ得るものとして、さきに全體のモヂュラス計算のときに用ひたのであつた。今は又一の任意選擇として取りあげられた。同樣に犯罪者二、三一五人の身長がもし一般身長の級を近似的に推定

1) Edgeworth, ibid., p. 196.

させるとみれば、これから計算した動搖の値も約一三を與へるであらう。しかし吾々の規準ではこれを假りに一の任意選擇とみなすのみである。卽ち級全體のモヂュラスの存在を假定し、次にこの値は觀察値から、近似的にきまるものとみてゐるので、あとは任意選擇の理によるだけのことと解される。

第二例より第五例までは第一例とおなじく人口の種々の級(Class)の間の身長の差を取扱つてゐる。卽ち第二例では王立協會々員の身長とSheffieldの會員の身長の差、第三例では精神病者の身長と一般人の身長の差、第四、五例では二都市の少年の身長の差を問題としてゐる。

今第四例をみよう。上層中等階級都市(A)の年齢十一歲から十二歲までの少年二九四人の平均身長と、工場都市(B)に於ける同年齢の少年三四一人の平均身長とを比較するに、兩者の差は約二・三吋といふ。このときこの差は偶然であるか。今の場合兩都市少年の身長に對するモヂュラスは、一般成年男子人口のそれ($\sqrt{13}$)とは假定しえない。彼は與へられた材料から計算して、兩者に對し夫々動搖一二・七二及び一〇を得てゐる。この値の差は、しかし計算の基となつた事例の僅かなことから、偶發的なりとし、しかも求める動搖は一三を超えぬとなし、「比較のモヂュラス」は $\sqrt{\frac{13}{294}+\frac{13}{241}}=0.3$ (又はそれより小) とする。この三倍は〇・九(吋)で、實際に得た差ははるかにこれより大である。かくてこの差は重要なりとする。

今この例について、規準の意味を考察する。先づ兩都市少年(十一歲—十二歲)の身長の級を考へる。これは兩都市について同一と考へ、その個數はかなりに大(無限個)と假定する。今この級から二九四個、三四一個、をいづれも任意選擇により取り出すとすると、その算術平均の差は $\sqrt{\frac{c^2}{294}+\frac{c^2}{241}}\times 3$ を超えないことが、殆んど確

からしい。さてCを如何に定めるか。現實に與へられてゐるのは二九四の身長と三四一のそれだけである。そこでかゝる値の一組が、丁度想定してゐる級の標本で、これを近似的に表現するものと假定した。今の場合もとの級の分布の測度たるモヂュラスをこれから求めた。しかもかくして得るモヂュラスの假定的近似値は、與へられた二つの組から計算する故相異なる筈である。想定の原理からは一つの値をきめねばならぬ。今の場合最大限一三として公式を適用した。

第六例では前掲三〇歳以上の男子の身長が三〇歳以下のものゝ身長より大であるかを論じてゐる。この場合二五―二九歳の男子一、五七六人の平均身長と、三〇―四〇歳の男子一、八八六人の平均身長との差違は〇・二吋。「比較のモヂュラス」は $\sqrt{\frac{13}{1,576}+\frac{13}{1,886}}=0.12$ で大した證據を得ない。更に彼は年齢の差の身長に及ぼす結果をみるために、二五―三〇歳、三〇―三五歳を比較し、又三〇―三五歳、三五―四〇歳を比較してゐる。

(二)出生、死亡、婚姻に於ける例――エッヂワースはこゝでは戸籍掛長の報告題目についてしらべてゐる。

一、出生――既に彼が指摘した如く、出生に於るけ男女の數の割合を、彼は「組合せ原理」によつて考究されるものとした。この場合彼は相隣接した數年をとり、イングランドの中部地方數州について、出生に於ける男女の割合をしらべ、平均的に一、〇四一對一、〇〇〇とみた。そしてかくして得る一組の比率からその分布の測度モヂュラスを、物理的方法及び組合せ方法により求め、兩者が略一致することを見出した。

ついで彼はかくの如く、時及び所によつて定義して得た比率の組が、組合せ原理に立つことから、かゝる比率に影響する他の條件によつて定義して得る組にもこの原理がなり立つであらうと推論した。

こゝで取扱つた例は、兩親の相對的年齢及び職業、出生の場所、年次的變化、季節的變動である。今最後の例につき紹介しよう。問題は出生に於ける體性比は季節によつて影響されるや否やを吟味することである。彼は全英國について十年間（一八七〇―七九年）四季の各〻についての比率を一〇、〇〇〇、〇〇〇人について計算した。本例に於て、彼は組合せ方法を取ることなく、四季について各〻物理的方法によりモヂュラスを計算した。各季につき、體性比は順次一〇四〇・四、一〇三九・四、一〇三七・五及び一〇四〇・一（千分比）を得、又動搖は夫々四四、四〇、四二、二九（千分比）を得た。そして「比較のモヂュラス」を計算してみるに、第三季の最低値も他とくらべてさしたる差違とみられないとした。なほ第四季の動搖の値は他の三つとはなれてゐるが、彼はこれを他の季の値と等しとしてもよいと云つてゐる。

二、婚姻――次にエッヂワースは全人口あたりの婚姻者數―婚姻率―を觀察し、この分布は時間的變動、場所的差違を有つことを指摘してゐる。しかしこの論文ではこの場合の研究は詳細に述べられてゐず[2]、又本稿に於ては「比較のモヂュラス」の適用を問題とするから、今これには立入らないでおかう。

三、死亡――第一例では種々の職業の健康の比較の問題を取扱ひ、こゝでは組合せ方法[3]が用ひらることを指摘してゐる。第二例では飲酒の不健康性を取りあげる。第三例では一八三八―七九年にわたり、英國の一般死亡率に實質的な變化があつたか否かを研究してゐる。即ちコレラのあつた一八四九年を除き、二十ヶ年及び二十一ヶ年の二時期にわかち、第一期、第二期に對し夫々動搖一八二及び一六〇（千分比）を得、比較のモヂュラスは $\sqrt{17}$ 即ち略四を得た。觀察して得た差は $2\frac{1}{3}$ であるから、實質的な差違はほとんど認められないとしてゐる。

2) Edgeworth, On Methods of Ascertaining Variations in the Rate of Births, Deaths, and Marriages. (J. S. S. 1885, pp. 628–652) Bowley, ibid., p. 93ff.

3) エッヂリースはこゝでは死亡率をとりあげて論ずる。なほ平均壽命による比較については個別觀察値が誤差法則に從はない場合の例として關說してゐる

(三)雜例——最初の二例に於ては、ジェヴォンス教授の觀察した、每季(Quarter)に於て第二月が他の二ヶ月に比し、破產數が多いこと、及び每季の爲替手形の總額には大差ないことを驗してゐる。第三例は蜂の巣について蜂の出入の數を、第四例は每週各曜日の London Club Dinner への出席者の動きを、又第五例では、ラテンの詩の文體を取扱つてゐる。これらの中、第一例を紹介しよう。

ジェヴォンスの觀察によれば、五五年にわたる每季の、第一、第二、第三月に對する破產數は夫々二四、九七六、二八、三九一、二七、四二七で、第二月で約一四%の優越を示してゐる。今この差がはたして重要なりやのしらべる。エッヂワースは每季の第一月、第二月の動搖を求めるため、數ヶ年(必ずしも引續きでない)から每季の第一月、第二月を何れも六四求め、これについで第一月、第二月の動搖を求め、夫々、一、六〇〇及び二、〇〇〇を得た。從つて二二〇ヶ月(55×4)平均に對する動搖は略八乃至九となり、かゝる二つの平均の差に對する動搖は略一八、かくて比較のモヂュラスは四・五を超えない。「さて第一月、第二月に對する平均は夫々一一三及び一二九であり、觀察された差はモヂュラスの四倍に近い。それ故ジェヴォンス教授の結論はたしかに正當づけられる。

各季の二ヶ月に對する觀察の吟味によつて、一ヶ月に對するモヂュラスが確定された故、吾々は第三月に對しても同じ値がとられると假定してよからう。—少くとも驗證のために、觀察値の第三系列からの標本を取つた後は。從つてもはや煩勞なしに、第二月の平均が第三月のより超過してゐるのは、モヂュラスの二倍になる故、偶發的でないと結論する。[4]」

にすぎない。

4) ibid. p. 207.

以上に於て、わたくしはエッヂワースの「統計の方法」に據り、彼の平均比較の論點を紹介し、若干の考察をなした。

むすび

エッヂワースはこの論文を結ぶにあたり、「私の主な意圖は、誤差法則の實際上の應用にあつた。讀者にとつて最も親しみのないと思はれる理論上の點は、第一に誤差法則が、觀察値自體―その平均を比較しようとするのであるが―により滿足されても、又滿足されなくても、この法則はひとしく偶然の除却に適用出來ること、第二に求めんとするモヂュラスを決定する二つの仕方―物理的誤差及び偶然の勝負事の類推に從ふ仕方―の間の關係である。前者は、それらが相異るときに選ばるべく、後者はそれらが一致するときに重要である。これらの原理に、わたくしは何等の獨創を主張しない。前者はラプラスの理論であり、後者はレキシス教授の理論である。[1]」と述べてゐる。[2] しかもボーレーはかう言つてゐる。「この研究の基本的な重要性及び獨創性は、充分評價されたとは思はれず、事實に於て次の十五年間、この論文は數學的方法を通常の經濟學上の、又は民勢學上の諸問題に應用するに必要な方法を、それから引きだしうる唯一つのすぐ役立てうる源泉であつた[3]。」

エッヂワースの統計學の問題の考究は、一貫して數學的確率論を基礎にしてゐる。本稿に於て考察した平均の比較の場合にも、現實にあたへられた觀察値の平均の差を偶然的とみるか、又は一法則を指示する―原因より來る―とみるかに際し、あたへられた觀察値を含む一の級を想定し、その中からの任意選擇とみたのである。わたくしは本稿に於て特にこの方法の意義・性質をとりあげたのである。

（一四・一一・五）

1) Edgeworth, ibid., p. 217.
2) なほ、Bortkewitsch, L. v., Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, (Jahrb. für Nationalök. u. Statistik, 3 Folge, Bd. X. 1895, S. 343 ff.) に批評あり、エッヂワースとの間に論爭がある。(Bd. XI. S. 174 ff., S. 701 ff. Bd. XII. S. 838 ff.)
3) Bowley, ibid., p. 86. なほ Edgeworth, Law of Error (Palgrave Dictionary, Vol. I. 1925, p. 886) 參照。